

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

单变量微积分笔记9——牛顿迭代法

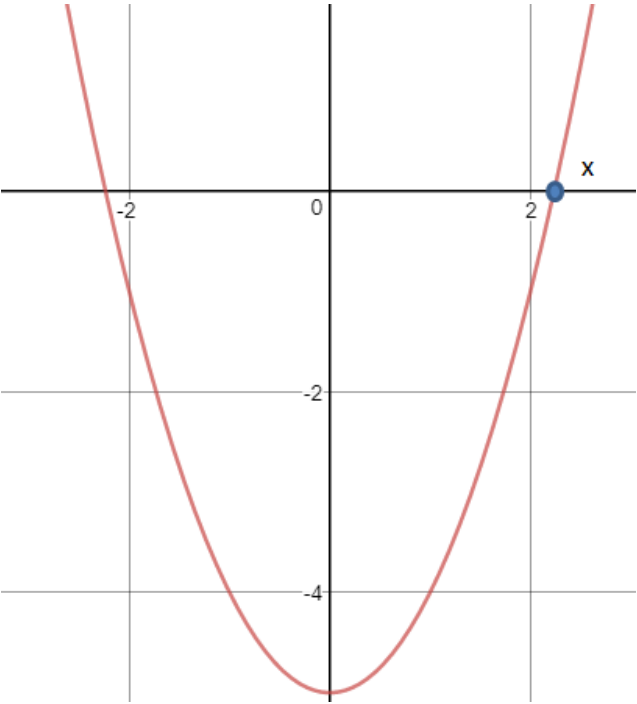
牛顿迭代法 (Newton's method) 又称为牛顿-拉夫逊 (拉弗森) 方法 (Newton-Raphson method)，它是牛顿在17世纪提出的一种在实数域和复数域上近似求解方程的方法。

示例1：求解平方根

先来看如何用牛顿迭代法求解5的平方根。在计算器上的结果是2.236067...

问题可以看作解方程 $x^2=5$ ，下面尝试用牛顿迭代法求解。

首先令 $f(x)=x^2-5=0$ ，这是标准步骤，取得一个新函数，令该函数为0。这是一个抛物线：



抛物线与x轴的交点x就是方程的解，它比2稍大一点。

现在在x=2处对f(x)做切线：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

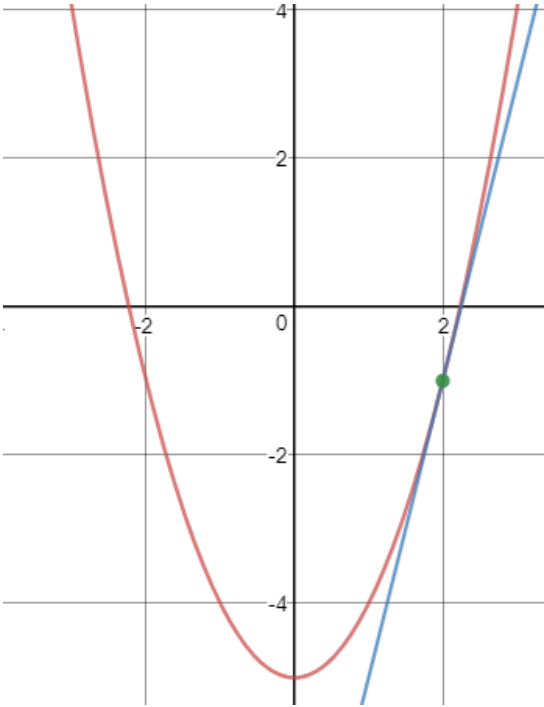
- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

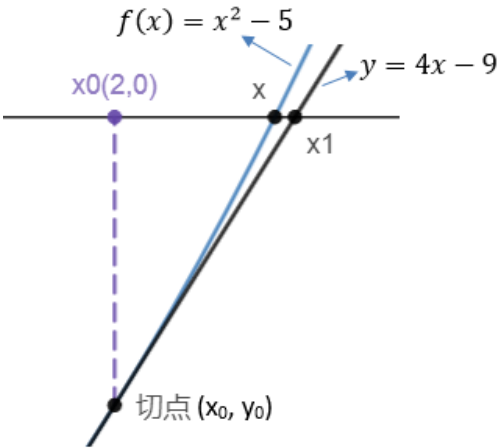
- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人



f(x)的切线



切线与x轴的交点

$x_0=2, y_0=x_0^2-5=-1$ ，设k是切线斜率：

$$\begin{aligned}y_1-y_0 &= k(x_1-x_0) \\ 0-y_0 &= k(x_1-x_0) \\ -\frac{y_0}{k} &= x_1-x_0 \\ x_1 &= x_0-\frac{y_0}{k} \\ x_1 &= x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\end{aligned}$$

在 x_1 处做f(x)的切线，重复上面步骤，

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

这就是牛顿迭代法的公式。通过作图可以看出，每一次迭代，x都将更靠近最终解。

$f'(x)=2x$ ，将公式代入目标方程 $f(x)=x^2-5$ ：

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

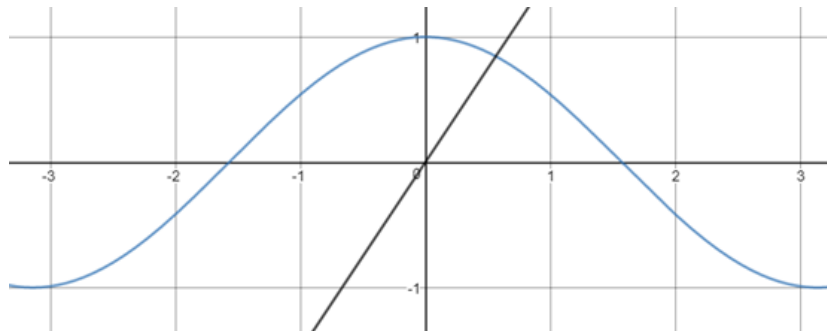
$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 5}{2x_0} = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 5}{2x_1} = \frac{161}{72} \approx 2.361$$

已经相当接近计算器的结果。

示例2：2cosx=3x

解方程2cosx=3x



由图像可知，方程存在唯一解。

$$f(x) = 2\cos x - 3x = 0, \quad f'(x) = -2\sin x - 3, \quad x_0 = \pi/6 \approx 0.52$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\pi}{6} - \frac{2\cos(\pi/6) - 3 \times \pi/6}{-2\sin(\pi/6) - 3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3} - \pi/2}{-1 - 3} \approx 0.564$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0.563$$

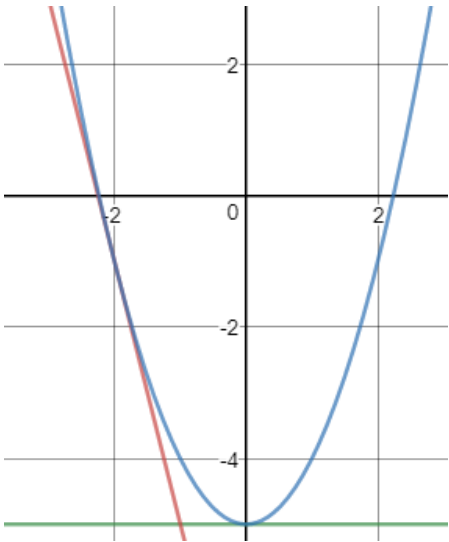
注意事项

牛顿迭代法几乎可以求解所有方程，但它仍然有一些限制。

通过前两个例子可以看到，在使用牛顿迭代法时，需要选取一个较为接近真实解的 x_0 作为迭代基数， x_0 如何选取呢？一句参考是：“ f' 不能太小， f' 不能太大， x_0 要在 x 附近”，这似乎要凭经验和感觉了，没有什么太好的办法；实际上，如果 x_0 和 x 的差距过大，可能会得到一个没谱的解。

设第 n 次迭代的误差是 $E_n = |x - x_n|$ ，那么需要满足 $E_{n+1} < E_n$ 。如果选择和计算都正确，误差缩小的速度将非常快。

以计算5的平方根为例，如果选择 $x_0 = -2$ ，结果将偏向于-2.236067...；如果选择 $x_0 = 0$ ，则 $f'(0) = 0$ ，没法继续迭代，函数曲线如下图所示：



选择了错误的 x_0

代码示例：牛顿迭代法开平方

设 $x^2=a$ ，则 $f(x)=x^2-a$ ，根据牛顿迭代法公式：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - (x_n^2 - a)}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}$$

```
1 const float EPS = 0.00001;
2 double sqrt(double x) {
3     if(x == 0)
4         return 0;
5     double result = x;
6     double lastValue;
7     do{
8         lastValue = result;
9         result = result / 2.0f + x / 2.0f / result;
10    }while(abs(result - lastValue) > EPS);
11    return (double)result;
12 }
```

上面方法开平方会很快，
但 <https://www.2cto.com/kf/201206/137256.html> 中提到了一个更快的方法。

1999年12月，美国id Software公司发布了名为“雷神之锤III”的电子游戏。它是第一个支持软件加速的游戏，取得了极大成功。（由于影响力过大，文化部于2004年将它列入了非法游戏名单）雷神之锤III并不是id Software公司的第一次成功。早在1993年开始，这家公司就以“毁灭战士”系列游戏名闻天下。1995年，“毁灭战士”的安装数超过了当年微软的windows 95。据传比尔盖茨才曾经考虑买下id software。（id software公司后来被推出过“上古卷轴”系列的Bethesda公司买下）

id Software所取得的成功很大程度上要归功于它的创始人约翰·卡马克。马克尔也是一个著名的程序员，他是id Software游戏引擎的主要负责人。回到刚才提到的雷神之锤，马克尔是开源软件的积极推动者，他于

2005年公布了雷神之锤III的源代码。至此人们得以通过研究这款游戏引擎的源文件来查看它成功的秘密。

在其中一个名字为q_math.c的文件中发现了如下代码段：



```
1 float Q_rsqrt( float number ) {
2     long i; float x2, y; const float threehalfs = 1.5F;
3     x2 = number * 0.5F;
4     y = number;
5     i = * ( long * ) &y; // evil floating point bit level hacking
6     i = 0x5f3759df - ( i >> 1 ); // what the fuck?
7     y = * ( float * ) &i;
8     y = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) ); // 1st iteration
9     // y = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) ); // 2nd iteration,
10    #ifndef Q3_VM #
11    ifdef __linux__ assert( !isnan(y) ); // bk010122 - FPE?
12    #endif
13    #endif return y;
14 }
```



这段代码的作用就是求number的平方根，并且返回它的倒数。

经过测试，它的效率比上述牛顿法程序要快几十倍。也比c++标准库的sqrt()函数要快好几倍。此段代码有一个奇怪的句子：

```
i = 0x5f3759df - ( i >> 1 ); // what the fuck?
```

没错，一般的求平方根都是这么循环迭代算的但是卡马克(quake3作者)真正牛B的地方是他选择了一个神秘的常数0x5f3759df 来计算那个猜测值，就是我们加注释的那一行，那一行算出的值非常接近1/sqrt(n)，这样我们只需要2次牛顿迭代就可以达到我们所需要的精度。好吧如果这个还不算NB,接着看：

普渡大学的数学家Chris Lomont看了以后觉得有趣，决定要研究一下卡马克弄出来的这个猜测值有什么奥秘。Lomont也是个牛人，在精心研究之后从理论上也推导出一个最佳猜测值，和卡马克的数字非常接近，0x5f37642f。卡马克真牛，他是外星人吗？

传奇并没有在这里结束。Lomont计算出结果以后非常满意，于是拿自己计算出的起始值和卡马克的神秘数字做比赛，看看谁的数字能够更快更精确的求得平方根。结果是卡马克赢了... 谁也不知道卡马克是怎么找到这个数字的。

最后Lomont怒了，采用暴力方法一个数字一个数字试过来，终于找到一个比卡马克数字要好上那么一丁点的数字，虽然实际上这两个数字所产生的结果非常近似，这个暴力得出的数字是0x5f375a86。

Lomont为此写下一篇论文，"Fast Inverse Square Root".

论文下载地址：

<http://www.math.purdue.edu/~clomont/Math/Papers/2003/InvSqrt.>

[pdf](#)<http://www.matrix67.com/data/InvSqrt.pdf>

向牛顿致敬

牛顿是近代科学的先驱，智商290，在多个领域都有非凡的成就。

他在1687年发表的论文《自然定律》里，对万有引力和三大运动定律进行了描述。这些描述奠定了此后三个世纪里物理世界的科学观点，并成为了现代工程学的基础。他通过论证开普勒行星运动定律与他的引力理论间的一致性，展示了地面物体与天体的运动都遵循着相同的自然定律；为太阳中心说提供了强有力的理论支持，并推动了科学革命。

在力学上，牛顿阐明了动量和角动量守恒的原理，提出牛顿运动定律[1]。在光学上，他发明了反射望远镜，并基于对三棱镜将白光发散成可见光谱的观察，发展出了颜色理论。他还系统地表述了冷却定律，并研究了音速。

在数学上，牛顿与戈特弗里德·威廉·莱布尼茨分享了发展出微积分学的荣誉。他也证明了广义二项式定理，提出了“牛顿法”以趋近函数的零点，并为幂级数的研究做出了贡献。

在经济学上，牛顿提出金本位制度。

在天文成上，牛顿1672年创制了反射望远镜。他还用万有引力原理说明潮汐的各种现象，指出潮汐的大小不但同月球的位相有关，而且同太阳的方位有关。牛顿预言地球不是正球体。

在哲学成上，牛顿的哲学思想基本属于自发的唯物主义，他承认时间、空间的客观存在。如同历史上一切伟大人物一样，牛顿虽然对人类作出了巨大的贡献，但他也不能不受时代的限制。例如，他把时间、空间看作是同运动着的物质相脱离的东西，提出了所谓绝对时间和绝对空间的概念；他对那些暂时无法解释的自然现象归结为上帝的安排，提出一切行星都是在某种外来的“第一推动力”作用下才开始运动的说法。《自然哲学的数学原理》牛顿最重要的著作，1687年出版。

向伟大的牛顿致敬！

总结

1. 牛顿迭代法的公式：
2. 注意事项， f' 不能太小， f'' 不能太大， x_0 要在 x 附近

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [牛顿迭代法](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288

[+加关注](#)

3
[推荐](#)

0
[反对](#)

« 上一篇: [单变量微积分笔记8——最值问题和相关变率](#)

» 下一篇: [单变量微积分笔记10——拉格朗日中值定理](#)

posted on 2017-09-25 22:58 我是8位的 阅读(3119) 评论(1) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yo zodcs.com

永中DCS, 文档在线
预览处理专家

10年行业经验, 受到众多政府客户、央企
单位、邮箱客户、OA办公系统、招聘网站、
教育客户青睐

了解详情 >

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日-3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
- 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型

- Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
- 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
[博客园](#)

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes